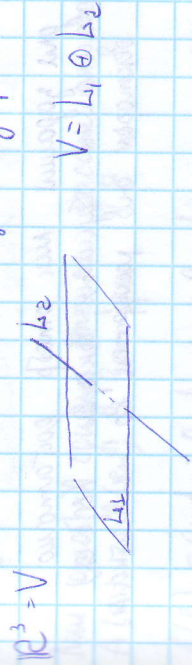


Задача 1

Даны $L_1 \neq \{0\}$, L_2 — подпространства V , $V = L_1 \oplus L_2$.



Глава 2. Линейные операторы

§1. Линейные отображения

Опр. Пусть V и W — линейные пространства над K .

Отображение $A: V \rightarrow W$ называется линейным, если для любых $u, v \in V$ и $\lambda \in K$ справедливы:

$$A(u+v) = A(u) + A(v) \\ A(\lambda u) = \lambda A(u)$$

Опр. Если пространство V совпадает с W , т.е. $W = V$, то A называется линейным оператором.

Примеры линейных операторов

- 1) $D: M_n \rightarrow M_n$. $Dp(t) = p'(t)$, но D — оператор дифференцирования.
- 2) $S: M_n \rightarrow M_n$. $Sp(x) = \int_0^x p(x) dx$ — оператор интегрирования.
- 3) $O: V \rightarrow V$. $Ox = 0$ — нулевой оператор.
- 4) $I: V \rightarrow V$. $Ix = x$ — тождественный оператор.

Важные линейные отображения

- 1) Транспонирование. Если $A = (a_{ij})$ — матрица оператора A в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$, то матрица оператора A^T в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ равна $A^T = (a_{ji})$.
- 2) Инволюция. Если $A^2 = E$, то A называется инволюцией. Например, $A(x, y) = (y, x)$ — инволюция.

3) Линейное отображение φ или $\varphi(x) = 0$, то $\varphi(0) = 0$.

4) $\varphi(x) = 0 \Rightarrow$ при задании φ или $\varphi(x)$ достаточно указать его значение на базисных векторах $\{e_1, \dots, e_n\}$. При задании φ в векторах $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ по линейности.

Теорема

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V . $f_1, \dots, f_m$ — произвольные векторы V . Тогда $\exists!$ линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V$, которое переводит $e_1, \dots, e_n$ в $f_1, \dots, f_m$.

Доказ.

О существовании

$$\forall x \in V \quad \varphi(x) = \sum x_i g_i, \quad A - \text{линейное отображение}$$

О единственности

$$A_1 - \text{линейное отображение} \quad A_1(x) = A_1\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i A_1(e_i) = \sum x_i g_i = A(x)$$

x_i — координаты (скаляры)

Существование

Линейное отображение φ задано $\Leftrightarrow$ заданы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ на базисных векторах. Но, оставшихся векторов $\varphi(e_{n+1}), \dots, \varphi(e_m)$ не задано.

5.2. Линейное отображение

Пусть φ — линейное отображение $A: V \rightarrow W$. $e_1, \dots, e_m$ — базис V . $f_1, \dots, f_n$ — базис W .

Линейное отображение A можно задать φ на базисе $A(e_1), \dots, A(e_m)$ — векторы W .

$$A(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m$$

$$A(e_m) = a_{1m}f_1 + a_{2m}f_2 + \dots + a_{mm}f_m$$

$$A = (A_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1, \dots, e_m$ — базис V . Векторы $f_1, \dots, f_n$ — базис W . A — линейное отображение $V \rightarrow W$.

Пусть: φ — линейное отображение $V \rightarrow W$ на W .

Теорема

Пусть φ — линейное отображение $V \rightarrow W$. $e_1, \dots, e_m$ — базис V . $f_1, \dots, f_n$ — базис W . Тогда $\exists!$ матрица A размера $n \times m$, такая что $\varphi(x) = Ax$.

Доказ: $e_1, \dots, e_m$ — базис V ; $f_1, \dots, f_n$ — базис W .

Линейное отображение φ можно задать φ на базисе $A(e_1), \dots, A(e_m)$ — векторы W .

1) φ — линейное отображение $V \rightarrow W$. $e_1, \dots, e_m$ — базис V . $f_1, \dots, f_n$ — базис W . Тогда $\exists!$ матрица A размера $n \times m$, такая что $\varphi(x) = Ax$.

Теорема

Матрица перехода для матрицы или отображения, преобразующего отображение e_k в e'_k , вычисляется в столбцах базиса.

Доказ:

Пусть φ отображение V задано $\forall e \in (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = \varphi(e)$. Тогда по $\textcircled{1}$ $\exists!$ n -матрица, переводящая e в e' .

Для матрицы $[A]_{ee'}$ верно $\forall e \in (e_1, \dots, e_n)$ $e' = A(e)$. Вспомогательная $n \times n$ матрица A называется матрицей перехода.

§ 3. Координаты вектора и его образа. Матрица или отображение базиса.

$\varphi: V \rightarrow W$ - линейное отображение e, f - базис V и W

Теорема

Если $y = \varphi(x)$, то $y_t = [\varphi]_{ef} x_e$.

Доказ:

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \quad [\varphi]_{ef} = A = [a_{ij}]$$

$$y = \varphi \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j)$$

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{mj} f_m$$

$$\Rightarrow y = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) f_i$$

e, e' - базисы V, W .
 T - матрица перехода от e к e' .
 S - матрица перехода от e' к e .
 $\varphi: V \rightarrow W, A = [\varphi]_{ef}, A' = [\varphi]_{e'f'}$

Теорема
 $A' = S^{-1} A T$

Доказ:

$x \in V, y \in W$

$$\begin{cases} y_t = A x_e \\ y_{t'} = A' x_{e'} \end{cases} \quad \text{но предыдущий теорема}$$

$$y_t = S y_{t'} \quad x_e = T x_{e'}$$

$$y_t = A x_e = A T x_{e'}$$

тогда $y_t = S y_{t'} = A T x_{e'}$

$$S y_{t'} = S A' x_{e'} \Rightarrow A' = S^{-1} A T$$

Следствие

- 1) Если $\varphi: V \rightarrow W$ - линейное отображение, e, e' - для базиса V, W , то $A' = T^{-1} A T$
- 2) Матрицу линейного отображения φ в разных базисах можно получить из другой путем элементарных преобразований.
- 3) Ранг матрицы или отображения не зависит от выбора базиса.

§4. Если u образ линейного отображения

$A: V \rightarrow W$ линейное отобра.

Опр. Ядро $\ker A = \{v \in V \mid Av = 0\}$

Опр. Образ $\operatorname{Im} A = \{w \in W \mid \exists v \in V: Av = w\}$

Теорема

Если A - л.н. отобра., то $\ker A$ и $\operatorname{Im} A$ образуют линейное разложение.

Доказ.: 1) $x, y \in \ker A \Rightarrow Ax = 0$ и $Ay = 0$
 $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$
 $\Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker A$
 $\Rightarrow$ образ л.н. разложения.

2) $v_1, v_2 \in V$ $Av_1 = w_1$ $Av_2 = w_2$, где $w_1, w_2 \in W$
 $A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha Av_1 + \beta Av_2 = \alpha w_1 + \beta w_2$
 $\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \operatorname{Im} A \Rightarrow$ л.н. разложение. $\square$

Теорема

Если $e_1, \dots, e_n$ базис V , то $A = \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle$

Доказ.: $y \in \operatorname{Im} A$, то $y = Ax$ для некоторого $x \in V$.
 $y = Ax = A(\sum x_j e_j) = \sum x_j Ae_j \in \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle$

С другой стороны $y \in \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle$

$$y = \sum x_j Ae_j = A(\sum x_j e_j) = Ax$$

$\square$

Опр. Ранг л.н. отображения - размерность образа.

Теорема (о ранге матрицы строки и столбцы)

Если $A: V \rightarrow W$ линейное отображение, то $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim V$

Доказ.: $e_1, \dots, e_k$ - базис $\ker A$. Дополним его до базиса V $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ $\dim V = n$

$$\operatorname{Im} A = \langle Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n \rangle = \langle Ae_{k+1}, \dots, Ae_n \rangle$$

$\Rightarrow 0, m, k \in \mathbb{N}$

Докажем, что $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ - л.н. и базис:
 $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n \Rightarrow A(L_{k+1}e_{k+1} + \dots + L_n e_n) = 0 \Rightarrow \in \ker A$
 $\Rightarrow L_{k+1}e_{k+1} + \dots + L_n e_n = 0$, т.к. $e_{k+1}, \dots, e_n$ - л.н. и.

$\Rightarrow Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ - л.н. и базис.
 $\dim \ker A = k$
 $\dim \operatorname{Im} A = n - k$

Замечание

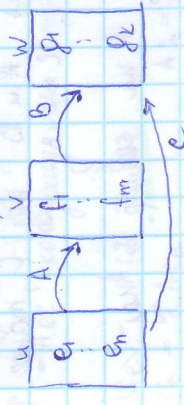
из теоремы не следует, что $V = \ker A + \operatorname{Im} A$.

Пример $\mathbb{D}$ - дифференцирование
 $\ker A = \mathbb{C}$
 $\operatorname{Im} A = \langle 1, x, \dots, x^n \rangle$

§5. Строение линейных отображений

Символы U, V, W - л.н. пространства над полем F (R или $\mathbb{C}$)

Опр. Строением л.н. отображения $A \in \mathcal{L}(U, V)$, где $\mathcal{L}(U, V)$ - л.н. об-е л.н. отображ. из $U \rightarrow V$, и $B \in \mathcal{L}(V, W)$ из $V \rightarrow W$ $C = B(Ax)$, $\forall x \in U$.



Теорема

Для линейных операторов A и B на V и W справедливо:

$$A: e_j \rightarrow A e_j = \sum_{s=1}^m a_{sj} f_s$$

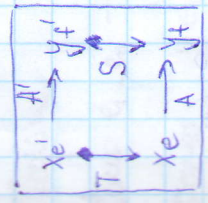
$$B: f_s \rightarrow B f_s = \sum_{i=1}^k b_{is} g_i$$

$$(BA) e_j = \sum_{i=1}^k b_{ij} g_i$$

$$B A e_j = B \left(\sum_{s=1}^m a_{sj} f_s \right) = \sum_{s=1}^m a_{sj} B f_s = \sum_{s=1}^m a_{sj} \left(\sum_{i=1}^k b_{is} g_i \right) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj} \right) g_j \Rightarrow C_{ij} = \sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj}$$

Теорема

Пусть $\varphi: V \rightarrow W$ — линейный оператор. e'_i, e'_j — базис в V ; $f'_1, \dots, f'_n$ — базис в W ; $x e = T x e'$



$$A' = S^{-1} A T$$

С6. Линейные операторы A и B на V и W удовлетворяют:

$$C x = A x + B x, \quad \forall x \in V, \quad C = A + B$$

Найти матрицу оператора C в базисах e'_i и f'_i .

Теорема

Для линейных операторов A и B на V и W справедливо:

$$A+B = Z(V, W)$$

Доказательство: Пусть $A, B \in Z(V, W)$, то $A: V \rightarrow W$ и $B: V \rightarrow W$. Тогда $A+B: V \rightarrow W$.

$$A x + B x = C x, \quad \forall x \in V, \quad A+B = C$$

Теорема

Пусть $Z(V, W)$ — линейный оператор. Тогда P — матрица оператора.

Доказательство:

Теорема

Пусть $V = W$, $\dim W = m$, то $Z(V, W)$ — линейный оператор.

Доказательство: Пусть $e \in V$ и $f \in W$. Тогда $\varphi: Z(V, W) \rightarrow P^{m \times m}$. $\varphi(A) = A e f$ — матрица оператора A в базисах e и f . Тогда $(A+B) e f = A e f + B e f = (A+B) e f$.

§ 7. Собственные пространства

Опр. Линейное отображение $f: V \rightarrow V$ называется линейным (или линейным) в пространстве V .

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V . Тогда для $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ мы имеем $f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$, где f_i — образ $f(e_i)$.

Опр. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Если задан базис, то можно в матрице A найти собственные значения и собственные векторы.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V . Тогда для $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ мы имеем $f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$, где f_i — образ $f(e_i)$.

Опр. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Если задан базис, то можно в матрице A найти собственные значения и собственные векторы.

Пусть f — линейное отображение $V \rightarrow V$.

Опр. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Опр. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Замечание:

Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Замечание

Пусть f — линейное отображение $V \rightarrow V$. Тогда для $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ мы имеем $f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$, где f_i — образ $f(e_i)$.

Теорема

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V . Тогда для $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ мы имеем $f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$, где f_i — образ $f(e_i)$.

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \text{ где } a_{ij} = \langle f(e_i), e_j \rangle$$

Тогда f — линейное отображение $V \rightarrow V$, где $f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$.

Глос. Собственные значения и собственные векторы. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Опр. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Опр. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Пример

1. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

2. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.

Опр. Собственные значения λ и собственные векторы v — это такие λ и v , что $f(v) = \lambda v$, где $v \neq 0$.